Anexo 3: Intensificación de 4º EES Nº 1

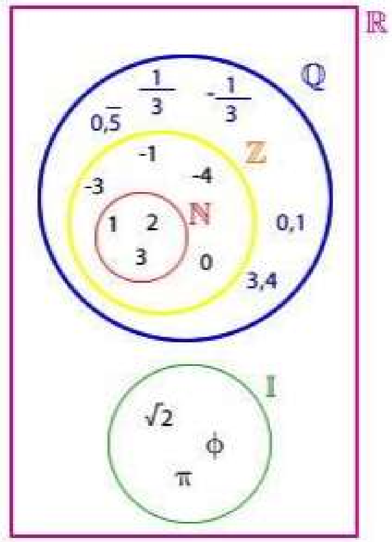
¿Qué son los números reales?

La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales recibe el nombre de conjunto de los números reales, y se denota con el símbolo $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales está formado por una serie de subconjuntos de números que definiremos a continuación:

- **Los números naturales** que surgen con la necesidad de contar

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$



- **Los números enteros** que complementan a los naturales pues contienen a los negativos y el cero.

$$\mathbf{Z} = \{...-2,-1,0,1,2...\}$$

- **El conjunto de los Números Racionales** (**Q**) que corresponden a la unión de todos los números cuya expresión decimal es finita, infinita periódica o infinita semiperiódica. Es decir, el conjunto de los números racionales está compuesto por todos los números que pueden ser escritos como una fracción cuyo numerador y denominador (distinto de cero) son números enteros. Ejemplo: **Q** = {....- ¾, - ½, - ¼ , 0, ¼ , ½, ¾,.....}

- **El conjunto de los Números Irracionales** (**I**) que está formado por la unión de todos los números que admiten una expresión infinita no periódica.

Puesto que los naturales están incluidos en los enteros y todos los enteros pueden ser representados como un número racional, se dice que los números reales son la unión de los números racionales y los irracionales.

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}}$$

Actividad 1 Completar la tabla con ∈ (pertenece), ∉ (no pertenece) según corresponda

Número \ Conjunto	Naturales	Enteros	Racional	Irracio-nales	Reales
7					
$\sqrt{10}$					
−2,08					
1,121221221					
$\sqrt{25}$					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{7}{6}$					

Actividad 2 Indicar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas

(A) Todos los números naturales son enteros.
(B) Todos los números reales son irracionales.
(C) Todos los números racionales son reales

INECUACIONES

María compró 3kg de naranjas, 2kg de manzanas y cierta cantidad de kg de mandarinas. Todo esto pesaba menos de 10 kg. ¿Cuántos kg de mandarina pudo haber comprado María?

$3 + 2 + x < 10$
$5 + x < 10$
$x < 10 - 5$
$x < 5$

A veces la resolución de un problema se plantea con una desigualdad. Estas desigualdades reciben el nombre de "inecuaciones".

¿Qué es una inecuación?

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de estos signos:
$<$ Menor que: $2x - 1 < 7$
$\leq$ Menor o igual que: $2x - 1 \leq 7$
$>$ Mayor que: $2x - 1 > 7$
$\geq$ Mayor o igual que: $2x - 1 \geq 7$

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
Cualquier número mayor que 8	$x > 8$
Cualquier número menor que 0	$x < 0$
Cualquier número menor o igual que 4	$x \leq 4$
Cualquier número mayor o igual que 9	$x \geq 9$

Una inecuación se resuelve de igual manera que una ecuación. Resolver una inecuación implica hallar el o los valores de la incógnita que verifica dicha desigualdad.
Al resolver una inecuación se encuentra un conjunto de valores que la verifican; este conjunto se llama **conjunto solución**. Podemos expresar la solución de la inecuación mediante una **representación gráfica** o un **intervalo.**
Ejemplos:

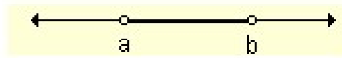
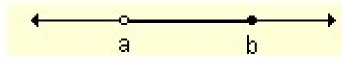
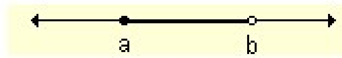
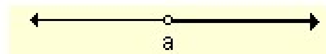
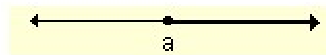
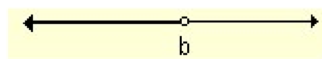
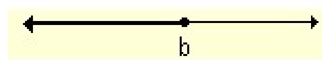
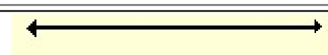
a) Resolver la ecuación:

$2x - 1 < 7$
$2x < 7 + 1$
$2x < 8$
$x < 8 : 2$
$x < 4$ S $(-\infty, 4)$ Representación gráfica:

b) Resolver la ecuación:

$2x - 1 \leq 7$
$2x \leq 7 + 1$
$2x \leq 8$
$x \leq 8 : 2$
$x \leq 4$ S $(-\infty, 4]$ Representación gráfica:

En el siguiente cuadro podemos ver como se clasifican los intervalos y cuál sería su representación gráfica

Nombre del intervalo	Notación conjuntista	Notación de intervalos	Representación gráfica
Abierto	{x / a < x < b}	(a, b)	
Semicerrado a derecha	{x / a < x ≤ b}	(a, b]	
Semicerrado a izquierda	{ x / a ≤ x < b}	[a, b)	
Cerrado	{ x / a ≤ x ≤ b}	[a, b]	
Infinito abierto a izquierda	{ x / x > a}	(a, +∞)	
Infinito cerrado a izquierda	{ x / x ≥ a}	[a, +∞)	
Infinito abierto a derecha	{ x / x < b}	(−∞ , b)	
Infinito cerrado a derecha	{ x / x ≤ b}	(−∞ , b]	
Infinito	R	(−∞ , +∞)	

Actividad 3: Representen en una recta numérica el conjunto solución de cada una de las siguientes desigualdades.

1. $x > -3$

2. $x < -7$

3. $x \geq -2$

4. $-1 < x < 3$

5. $2 \leq x \leq 7$

6. $-4 < x \leq 0$

Para poder resolver inecuaciones deben tenerse en cuenta algunas propiedades:

- Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

  3x + 2 - 2 < 5 - 2

  3x < 5 – 2

  3x : 3 < 3 : 3

  x < 3 : 3

  x < 1

- Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número positivo, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

  2x < 6

  2x : 2 < 6: 2

  x < 3

- Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número negativo, la inecuación resultante CAMBIA de sentido y es equivalente a la dada.

  -x ≤ 5

  -x. (-1) ≥ 5. (-1)

  x ≥ -5

Actividad 4: Resuelve las siguientes inecuaciones. Representar la solución en intervalos y gráficamente.

$a)\ 2(x-4) < 3x+2$ $c)\ -5(x-3) \geq 2(-x+1)$ $e)\ -3x+\frac{1}{2} < \frac{5}{6}$

$b)\ 4x-1 \geq 2x+5$ $d)\ \frac{1}{2}x+3 > 5$ $f)\ 3-\frac{1}{4}x < \frac{5}{4}$

<u>Funciones: Representaciones gráficas</u>

Algunos gráficos se usan para efectuar una representación que permite visualizar de qué manera se relacionan dos magnitudes y cómo se modifica una en función de la otra. Como las magnitudes pueden variar, se las llama **variables.**

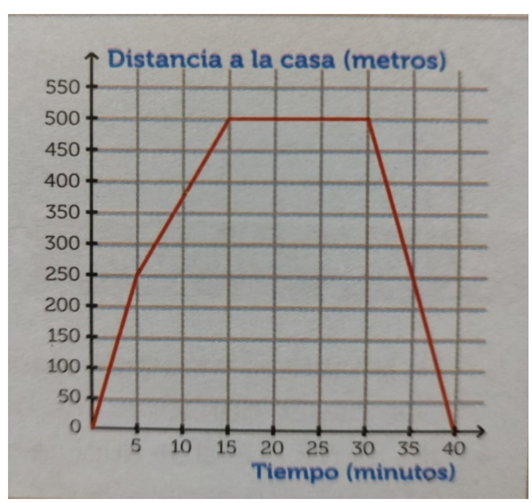
Cuando se relacionan dos variables, es posible saber si una depende de la otra. Por ejemplo, si se considera la temperatura corporal de un paciente y la hora en que se registró, puede decirse que la temperatura depende del tiempo, ya que esta podría tomar diferentes valores según el momento del día. En este caso se dice que la temperatura es la **variable dependiente** y que el tiempo es la **variable independiente**.

En los gráficos, la **variable independiente** suele representarse en el eje horizontal y la **variable dependiente**, en el vertical.

Actividad 5

Olivia fue caminando desde su casa hasta la oficina del correo a buscar un paquete. El siguiente gráfico representa la distancia de Olivia a su casa desde que comenzó el recorrido el recorrido del correo.

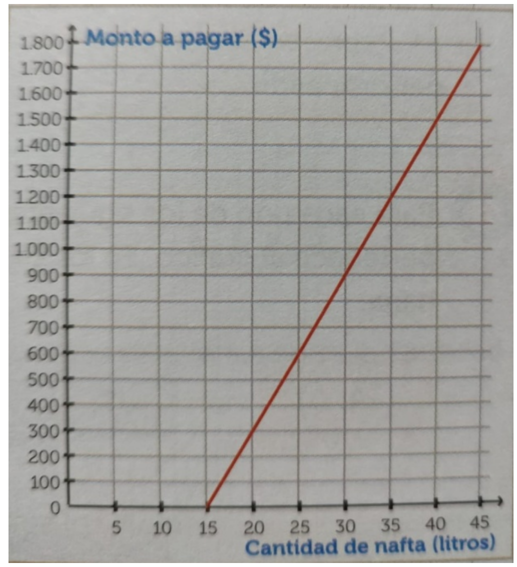
a) ¿Cuánto tiempo estuvo Olivia fuera de su casa?
b) ¿A qué distancia de la casa está la oficina de correo? ¿Cuánto tiempo tardó en llegar?
c) ¿Cuánto tiempo estuvo en el correo?
d) ¿En algún instante Olivia Estuvo a 55º metros de su casa?
e) ¿Dónde se encontraba Olivia a los 40 minutos de haber salido de su casa?
f) Identifiquen cuales son las variables representadas en el gráfico. ¿Cuál es la independiente y cuál la dependiente?



Para representar la relación entre dos variables es usual utilizar la expresión **f(x) = y**, que se lee “f de **x** es igual a **y**”, lo que indica que **y** es la imagen de **x**. Por ejemplo, f(5) = 7 se lee “f de 5 es igual a 7” y significa que el valor 5 de la variable independiente está relacionado con el valor 7 de la variable independiente. También se puede decir que 7 es la **imagen** de 5.

Actividad 6

Un automovilista entra en una estación de servicio a cargar combustible. En su tanque, que tiene una capacidad máxima de 45 litros, lleva 15 litros de nafta. En esa estación el precio del litro de nafta es de $60. A continuación se representa la relación entre el monto que deberá pagar (en pesos) dependiendo de la cantidad de nafta que haya en el tanque (en litros)



a) Completar la tabla

Cantidad de nafta en el tanque (litros)	15	20	25	30	35	40	45
Monto a pagar ($)							

b) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones representan un monto a pagar en función de los litros de nafta que hay en el tanque?

• f(25) = 600 **• f(600) = 25** **• f(15) = 0** **• f(1800) = 45** **• f(20) = 400** **• f(400) = 20**

c) Indiquen con cuál o cuáles de las oraciones se corresponde cada expresión. En caso de no, explicar el por qué.

- Si el automovilista llena el tanque, deberá pagar $1800.

f(45) = 1800

- Si el automovilista paga un monto de $900, entonces en el tanque hay 30 litros.
- Si el automovilista paga un monto de $30, entonces en el tanque hay 900 litros.

f(30) = 900

- Si el automovilista paga un monto de $1800, entonces en el tanque hay 45 litros.

Cuando entre dos variables **A** y **B** se verifica que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, se dice que la relación entre **A** y **B** es una **función**. La primera es la variable independiente y la otra es la variable dependiente, ya que los valores que toma **B** dependen de los valores que se le asignen a **A.**

Actividad 7

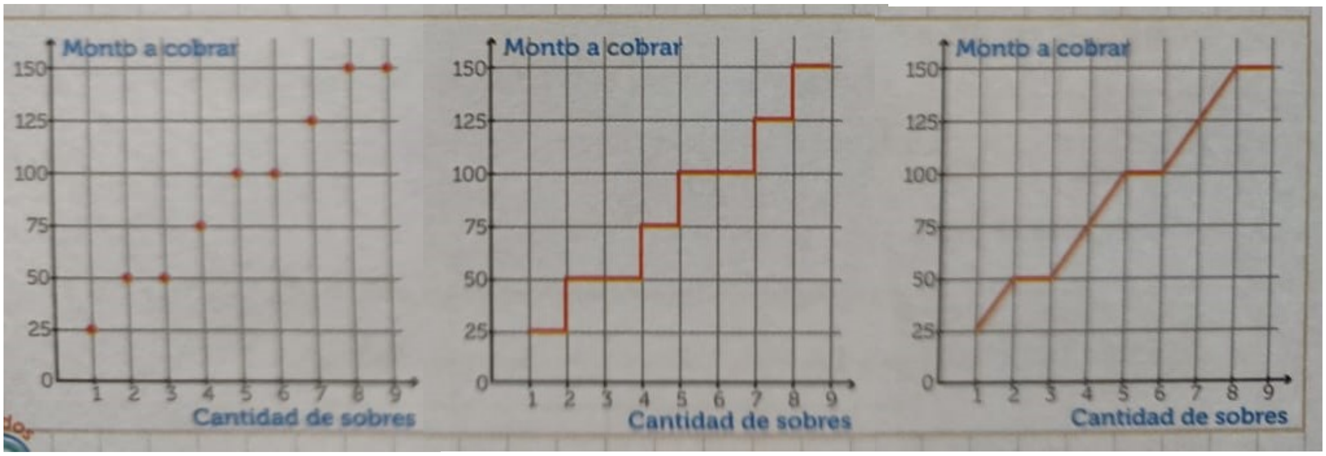
En un almacén hay una oferta de 3 X 2 en sobres de jugo que tienen un precio unitario de $25. Para cobrar de manera más rápida, la cajera del negocio quiere confeccionar una tabla que indique el monto a cobrar según la cantidad de sobres comprados por cada cliente.

a) Completar la siguiente tabla.

Cantidad de sobres	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Monto a cobrar (en $)									

b) ¿Es cierto que la variable independiente es la cantidad de sobres y la variable dependiente el monto a cobrar? ¿O es al revés?

c) ¿Cuál de estos gráficos les parece que representa mejor la relación entre el monto a cobrar y la cantidad de sobres comprados? ¿Por qué?



Actividad 8

Una pileta de 25.000 litros de capacidad se vacía por medio de una bomba que opera a un ritmo constante. El siguiente gráfico representa la cantidad de agua que contiene la pileta en función del tiempo transcurrido desde que comenzó a vaciarse.

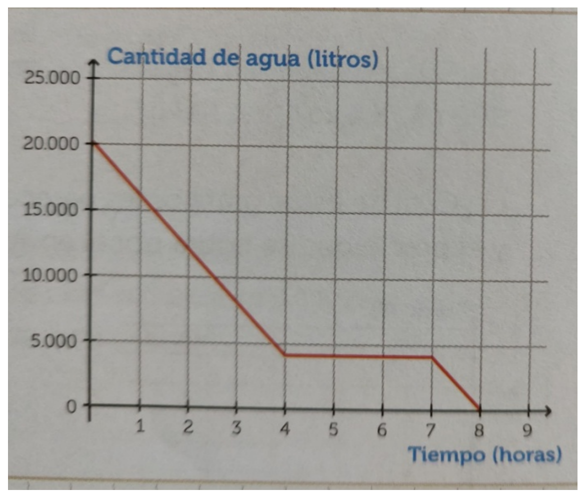
a) ¿Es cierto que la pileta no estaba llena cuando comenzó a vaciarse?

b) ¿Cuánto tardó en vaciarse?

c) ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable independiente? ¿Y la dependiente?

d) ¿Cuánto tiempo estuvo detenida la bomba durante el proceso de vaciado? ¿Cuánto habría tardado en vaciarse si no se hubiera detenido la bomba?

e) ¿Cuántos litros de agua por minuto extrae la bomba?



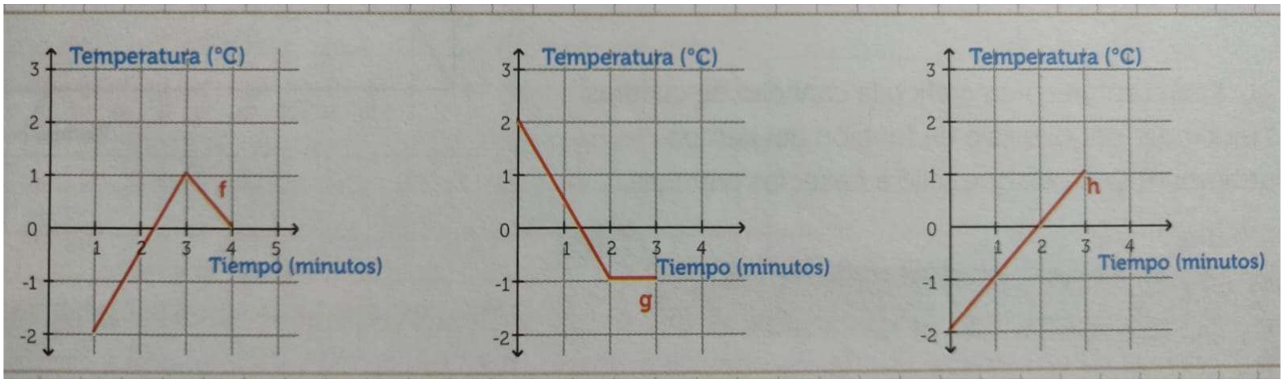
Se llama **dominio** de una función *f* al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se los suele escribir como Dom (*f*).

Se llama **imagen** de una función *f* al conjunto de todos los valores que suele tomar la variable dependiente. Suele indicarse como Img (*f*)

Actividad 9

Se realizaron tres experimentos, cada uno con una sustancia distinta. A continuación se muestran los gráficos de las funciones que representan la temperatura de cada una de las sustancias durante los experimentos a partir del momento en que se empieza a medir la temperatura.

> ***A tener en cuenta!!!***
>
> La escritura [**a** ; **b**] hace referencia todos los números que se encuentran entre **a** y **b**, considerando también los números **a** y **b**. se lo llama **intervalo cerrado**.



a) ¿Es cierto que los tres experimentos tuvieron la misma duración?
b) Para el experimento representado por la función f, determinen la temperatura inicial y la temperatura máxima de la sustancia. ¿Es la misma? ¿Y su temperatura final y su temperatura máxima?
c) Hallen el dominio y la imagen de cada una de las funciones.

Actividad 10

Un objeto cae desde cierta altura. La fórmula $f(x) = 125 - 5x^2$ permite calcular de manera aproximada la altura del objeto (medida en metros) en función del tiempo que pasó desde que comenzó a caer (medido en segundos).

a) ¿Cuánto tarda en caer al piso?
b) ¿Está en algún momento a 80metros de altura? ¿Y a 130 metros?
c) Graficar la función
d) Hallar el dominio y la imagen de la función.

Actividad 11

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- El dominio de una función está formado por los valores de la variable dependiente.
- El dominio y la imagen de una función siempre contiene infinitos valores.
- Para determinar el dominio de una función es necesario identificar los valores inicial y final de la variable independiente.

<u>Ecuación de una recta conocida la pendiente y un punto de ella</u>

Para hallar la ecuación utilizaremos la siguiente fórmula: $\boldsymbol{y} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ y el un punto de la recta: $\mathbf{P} = (\ ; \boldsymbol{y})$ Ilustremos con un ejemplo para una mejor comprensión:
Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (-2 \,;\, 3)$ y cuya pendiente es $\boldsymbol{a} = 5$
Para hallar la ecuación de esta recta solo falta encontrar el valor de la ordenada al origen $\boldsymbol{b}$.

1°) Reemplazamos el valor de la pendiente $a = 5$ y del punto $P = (-2 \,;\, 3)$ en la fórmula $y = a \cdot x + b$ → Recordemos que la primera coordenada del punto corresponde a x, entonces $x = -2$; y la segunda coordenada corresponde a y, es decir, $y = 3$. Luego

$y = a \cdot x + b$ → $3 = 5 \cdot (-2) + b$ → Queda formada una ecuación cuya incógnita es $\boldsymbol{b}$

2°) Resolvemos la ecuación para encontrar el valor de ***b***

$3 = 5 \cdot (-2) + b$
$3 = -10 + b$
$3 + 10 = b$
$\mathbf{13} = \boldsymbol{b}$

3°) Por ultimo armamos la ecuación con los datos de la pendiente y ordenada:

$a = 5 \qquad b = 13$

$\boxed{y = 5x + 13}$ → Ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (-2\ ;\ 3)$ y cuya pendiente es $a = 5$

Actividad 12:

Hallar la ecuación de las siguientes rectas:
a) $Cuya\ pendiente\ es\ a = -3\ y\ pasa\ por\ el\ punto\ P = (-1\ ;\ 4)$
b) Cuya pendiente es 2 y pasa por el punto $Q = (1\ ;\ -1)$

Rectas paralelas y perpendiculares:

- Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

Ejemplo: $y = 5x - 7\ e\ y = 5x + 1$ son rectas paralelas.

- Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son opuestas e inversas.

Ejemplo: $y = -2x - 4\ e\ y = \frac{1}{2}x - 6$ son rectas perpendiculares.

A continuación veremos un ejemplo de un ejercicio utilizando paralelismo, perpendicularidad y lo visto anteriormente.

Ejemplo: Dada la recta $y = -\frac{1}{4}x - 3$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a la anterior que pase por el punto $P = (8\ ;\ -4)$.
b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la dada que pase por $Q = (-1\ ;\ -5)$.
c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema cartesiano.

Resolución:
a) Como la pendiente de la recta dada es $-\frac{1}{4}$ y la recta que queremos hallar debe ser paralela, entonces tiene la misma pendiente, es decir, $a = -\frac{1}{4}$. Además por las coordenadas del punto P tenemos: $x = 8\ e\ y = -4$
Reemplazamos en la fórmula estos valores y resolvemos para hallar ***b.***

$-4 = -\frac{1}{4} \cdot 8 + b$
$-4 = -2 + b$
$-4 + 2 = b$
$\mathbf{-2} = \boldsymbol{b}$

Luego la ecuación de la recta paralela es $\boxed{y = -\frac{1}{4}x - 2}$

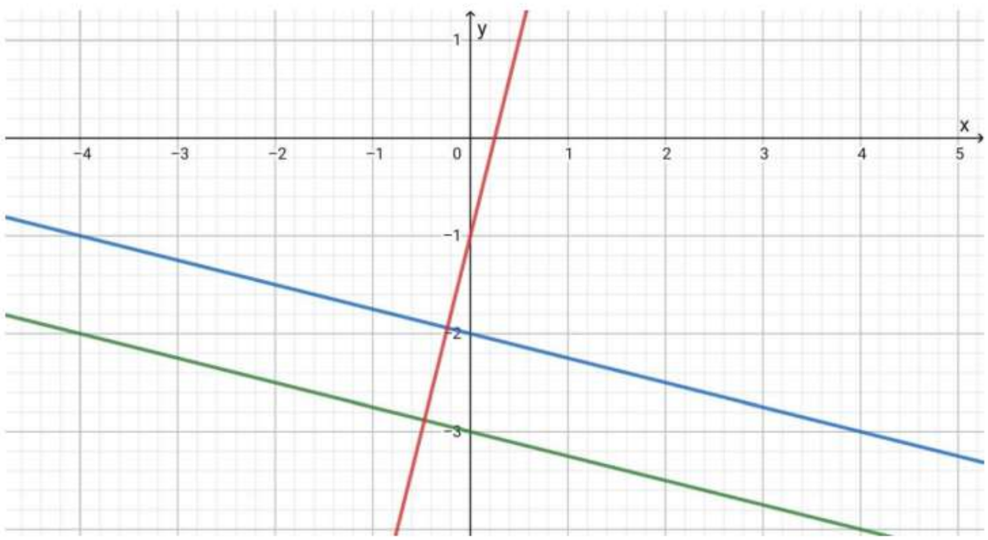
b) En este caso como queremos hallar una recta perpendicular, entonces la pendiente debe ser opuesta e inversa a $-\frac{1}{4}$ (Le cambio de signo y “doy vuelta”), es decir, $a = 4$. Además por las coordenadas del punto Q tenemos: $x = -1$ e $y = -5$

Reemplazamos en la fórmula estos valores y resolvemos para hallar $\boldsymbol{b}$

$$-5 = 4 \cdot (-1) + b$$
$$-5 = -4 + b$$
$$-5 + 4 = b$$
$$\mathbf{-1} = \boldsymbol{b}$$

Luego la ecuación de la recta perpendicular es $\boxed{y = 4x - 1}$

c) Graficamos las 3 rectas:



Actividad 13.

Dada la recta cuya ecuación es $y = -\frac{1}{3}x - 2$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la anterior que pase por $Q = (3; 2)$

b) Graficar ambas rectas en un mismo sistema cartesiano.

Actividad 14.

Dada la recta cuya ecuación es $y = -2x + 2$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a la anterior que pase por el punto $P = (1 ; 3)$

b) Graficar ambas rectas en un mismo sistema cartesiano.

Actividad 15.

Dada la recta $y = -\frac{1}{2}x + 5$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a la anterior que pase por el punto $P = (4 ; -1)$.

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la dada que pase por $Q = (-3 ; -3)$

c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema cartesiano.